PROSEMINAR ALGEBRA WS 2014

Die mit ^{s} gekennzeichnete Aufgabe ist schriftlich auszuarbeiten und nächsten Dienstag im Proseminar abzugeben. Aufgaben mit * sind etwas anspruchsvoller.

79 Verifiziere die diversen Aussagen der Vorlesung über den Zerfällungskörper von $x^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$ und seine Galois-Gruppe.

80 Es seien $x_1, \ldots, x_n$ Variable und $L = K(x_1, \ldots, x_n)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[x_1, \ldots, x_n]$. Betrachte die Gruppe $G = S_n$ der Permutationen der x_i als Untergruppe von $\mathrm{Aut}_K(L)$. Bestimme den Fixkörper L^G.

81^s Sei K Körper der Charakteristik $\neq 2$, und sei $f \in K[x]$ ein quadratisches Polynom.

(a) Der Zerfällungskörper von f ist gleich $K(\alpha)$, wobei α eine Nullstelle von f im algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K ist.

(b) $K(a)$ definiert eine Galois-Erweiterung von K.

(c) Bestimme die Galois-Gruppe der Erweiterung.

Hinweis: Betrachte zuerst $f = x^2 - a$ mit $a \in K$ und führe dann auf diesen Fall zurück.

82 Bestimme die Galois-Gruppe des Zerfällungskörpers von $x^3 - 10$ über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

83* Eine abelsche (bzw. zyklische) Kette in einer Gruppe G ist eine Kette von Untergruppen $G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_k = G$ mit $G_i \subset G_{i+1}$ normal und G_{i+1}/G_i abelsch (bzw. zyklisch) für alle i (im Gegensatz zu auflösbaren Gruppen muss G_0 nicht die triviale Gruppe sein).

Zeige: Jede endliche Gruppe mit abelscher Kette erlaubt auch eine zyklische Kette.

Hinweis: Induktion über $|G|$. Faktorisiere G über eine zyklische Untergruppe.

84 Ist $G \to H$ Gruppenhomomorphismus und hat H eine zyklische, bzw. abelsche Kette, so auch G.